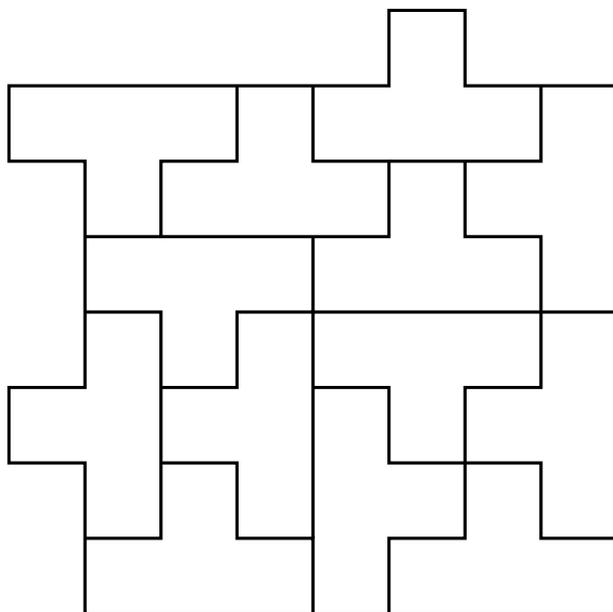


8.1. Разрежьте данную фигуру на 13 одинаковых частей по линиям сетки.

Решение: Например, можно разрезать так



Критерии: Любое верное разрезание – 7 баллов.

8.2. Лосяш идёт в гости к Совунье вдоль реки со скоростью 4 км/ч. Каждые полчаса он запускает бумажные кораблики, которые плывут к Совунье со скоростью 10 км/ч. С каким временным интервалом прибывают кораблики к Совунье?

Решение: Если бы Лосяш запускал кораблики с одного места, то они приходили бы раз в полчаса. Но он идёт, поэтому следующему кораблику нужно проплыть меньшее расстояние, чем предыдущему. За полчаса расстояние между Лосяшем и последним корабликом будет $(10 - 4) \cdot 0.5 = 3$. Значит, между соседними корабликами 3 км, и следующему кораблику останется проплыть именно столько, когда предыдущий уже приплывёт к Совунье. Скорость кораблика 10 км/ч, то есть 1 км за 6 минут, откуда 3 км будут пройдены корабликом за 18 минут, что и является ответом.

Критерии: Верно найдено расстояние 3 км – 3 балла.

Только ответ или ответ с проверкой – 1 балл.

8.3. Найдите наибольшее четырёхзначное число, все цифры которого различны, и которое делится на каждую свою цифру. Ноль, конечно же, использовать нельзя.

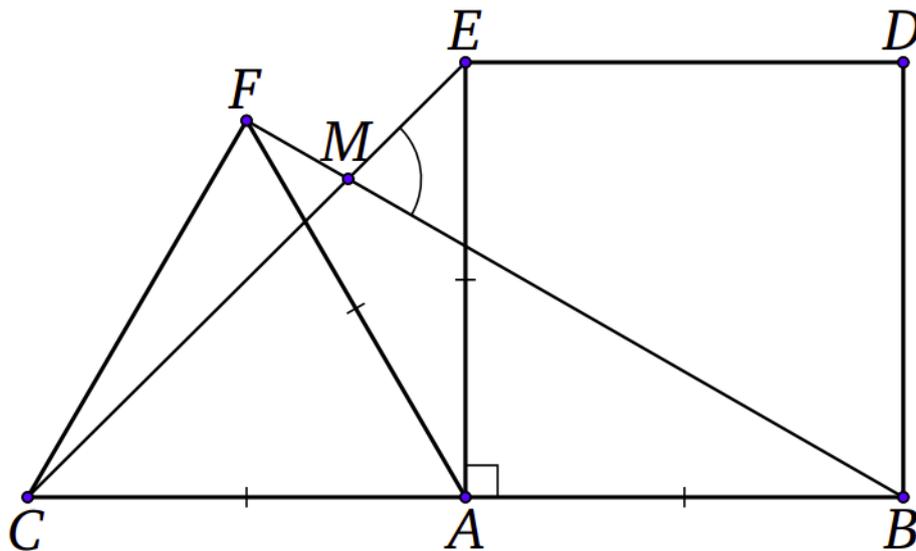
Решение: Так как количество разрядов фиксировано, то число будет тем больше, чем больше цифры в его старших разрядах. Будем искать число в виде $\overline{98ab}$. Оно должно делиться на 9. Значит, сумма $a + b$ должна давать остаток 1 при делении на 9. При этом эта сумма не превосходит 13, так как состоит из разных однозначных слагаемых, которые

меньше 8. Значит, эта сумма либо равна 1, либо 10. Наибольший вариант, подходящий под эти условия 9873 не подходит, так как не делится на 8. Следующий по старшинству 9864 очевидно подходит.

Решение: Только доказано, что число 9864 подходит – 2 балла.

Идея искать ответ в виде $\overline{98ab}$ – 1 балл.

8.4. Точка A расположена посередине между точками B и C . Квадрат $ABDE$ и равнобедренный треугольник CFA находятся в одной полуплоскости относительно прямой BC . Найдите угол между прямыми CE и BF .



Решение: Обозначим за M точку пересечения отрезков BF и CE . Заметим, что $\angle CFB = 90^\circ$, так как FA — это медиана, равная половине стороны, к которой она проведена. Из этого следует, что $\angle FBC = 180^\circ - 90^\circ - \angle FCB = 30^\circ$. Из равнобедренного прямоугольного треугольника CAE следует, что $\angle ECA = 45^\circ$.

Тогда в треугольнике $СМВ$ угол $\angle CMB = 180^\circ - \angle MBC - \angle MCB = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$, что и является ответом.

Критерии: Найден угол $\angle CBF$ – 2 балла.

Найден угол $\angle ECA$ – 1 балл.

Неважно, найден угол в 105° или в 75° .

8.5. Компьютерная сеть Пентагона представляет собой 1000 компьютеров, некоторые пары из которых соединены проводами. Хакер Вася написал вирус, который каждую минуту заражает все компьютеры, напрямую соединённые проводом с уже заражёнными. Известно, что сеть устроена таким образом, что если Вася загрузит свой вирус на любой из компьютеров, то через некоторое время заражённой окажется вся сеть. Докажите, что хакер Вася может таким образом выбрать 90 компьютеров Пентагона, что если он загрузит на них вирус одновременно, то уже через 10 минут заражённой окажется вся сеть.

Решение: Каждый компьютер представим вершиной графа, а соединение проводами — ребром между ними. Из условия следует, что граф связный. Последовательность вершин, в которой всякие две соседние вершины соединены ребром, а никакое ребро не присутствует дважды, называют *цепью*. Цепь, которая заканчивается в той же вершине, где она началась, называют замкнутой цепью или *циклом*. Связный граф, в котором нет циклов, называют *деревом*.

Если связный граф не является деревом, то можно разорвать одно из его рёбер, входящих в цикл, не нарушая связности графа. Таким образом, разорвав при необходимости часть рёбер, можно от любого связного графа перейти к его *остовному дереву*. (Остовное дерево определено неоднозначно, однако какое именно остовное дерево будем рассматривать, несущественно.)

Таким образом, перейдём к рассмотрению 1000-вершинного дерева, полученному из начального графа удалением всех циклов. Рассмотрим в этом графе цепь наибольшей длины $X - A_1 - A_2 - \dots - A_k - Y$. Возможны два случая.

Если $k \leq 19$, то достаточно заразить вершину A_{10} (или любую другую, если даже десятой нет), и через 10 минут вся сеть окажется заражённой. Действительно, так как мы выбрали цепь наибольшей длины, то в этом случае нет вершин на расстоянии больше 10 от A_{10} (иначе можно бы было продлить путь до этой вершины до X или до Y). Поэтому этот случай тривиален.

Если $k \geq 20$, то отделим от графа вершины X, A_1, \dots, A_{10} и всех, кто связан с ними не через A_{11} (их не меньше 11). Среди отделённых вершин нет вершин на расстоянии больше 10 от A_{10} (иначе, опять-таки, мы бы получили противоречие с максимальной длиной цепи). Значит, если мы заразим A_{10} , то вся отделённая часть окажется через 10 минут заражённой.

Заметим, что после отделения останется всё ещё дерево, так как оставшийся граф, очевидно, связан. Повторим описанную процедуру 89 раз. На каждом шаге мы либо исчерпаем компьютеры, либо отделим по крайней мере $89 \cdot 11 = 979$ вершин, и останется не более 21 компьютера. Повторим для них те же самые рассуждения (но теперь заразим среднюю вершину в самом длинном пути), и получим, что мы как раз выбрали 90 компьютеров, и этого хватает.

Критерии: Идея рассматривать самые длинные цепи — 2 балла.